



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală a județului Alba, 13 februarie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a IX-a

Problema 1.

Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z , cu $x \cdot y \cdot z = 8$.

a) Arătați că $\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq x + y + z$.

b) Determinați numerele x, y, z , știind că ele verifică în plus egalitatea

$$\frac{x^2}{y+3z+\sqrt{2x}} + \frac{y^2}{z+3x+\sqrt{2y}} + \frac{z^2}{x+3y+\sqrt{2z}} = \frac{6}{5}.$$

Soluție și barem:

a) • Din inegalitatea mediilor, deducem $x + y + z \geq 6$1p

• $(\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z})^2 \leq 6(x + y + z) \leq (x + y + z)^2$, de unde

$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq x + y + z$ 2p

b) • Utilizând din nou inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz obținem:

$$\frac{x^2}{y+3z+\sqrt{2x}} + \frac{y^2}{z+3x+\sqrt{2y}} + \frac{z^2}{x+3y+\sqrt{2z}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{4x+4y+4z+\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}} \dots\dots\dots 2p$$

$$\stackrel{a)}{\Rightarrow} \frac{x^2}{y+3z+\sqrt{2x}} + \frac{y^2}{z+3x+\sqrt{2y}} + \frac{z^2}{x+3y+\sqrt{2z}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{5(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{5} \geq \frac{6}{5} \dots\dots\dots 1p$$

• Avem egalitate dacă și numai dacă $x = y = z = 2$ 1p

Problema 2.

Să se determine numerele reale strict pozitive a_1, a_2, \dots, a_n , cu $a_1 = 1$, pentru care este adevărată egalitatea:

$$\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_3+a_4} + \dots + \frac{1}{a_n+a_{n+1}} = a_{n+1} - 1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție și barem:

$$\bullet n = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+a_2} = a_2 - 1 \Rightarrow a_2 = \sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\bullet n = 2 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+a_3} = a_3 - 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+a_3} = a_3 - \sqrt{2} \Rightarrow a_3 = \sqrt{3} \dots\dots\dots 1p$$

• Presupunem $a_k = \sqrt{k}$ și demonstrăm că $a_{k+1} = \sqrt{k+1}$ 2p

$$\bullet \text{ Din ipoteză avem } a_k - 1 + \frac{1}{a_k+a_{k+1}} = a_{k+1} - 1 \Rightarrow a_{k+1}^2 = a_k^2 + 1. \dots\dots\dots 1p$$

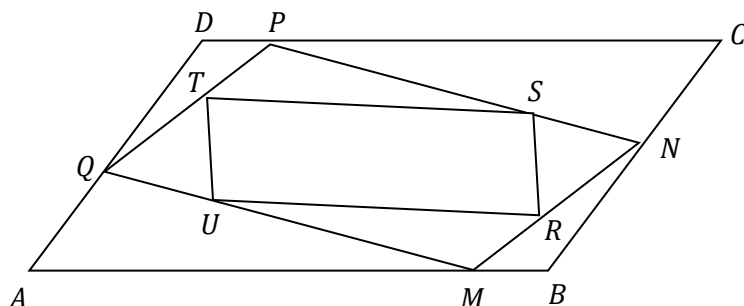
$$\bullet a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + 1} = \sqrt{k+1}. \dots\dots\dots 1p$$

• În concluzie $a_n = \sqrt{n}$, pentru orice n număr natural nenul.1p

Problema 3.

Considerăm patrulaterul $ABCD$. Fie punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$ astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PD} = \frac{QD}{QA} = k$ și punctele $R \in (MN), S \in (NP), T \in (PQ), U \in (QM)$ astfel încât $\frac{RM}{RN} = \frac{SN}{SP} = \frac{TP}{TQ} = \frac{UQ}{UM} = l$, unde $k, l \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Să se arate că dacă $RSTU$ este paralelogram, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Soluție și barem:



Pentru un punct oarecare O în plan avem următoarele relații vectoriale:

- $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}, \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{1+k}, \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OD}}{1+k}, \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OA}}{1+k}$ 1p
- $\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OM} + l\overrightarrow{ON}}{1+l}, \overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{ON} + l\overrightarrow{OP}}{1+l}, \overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{OQ}}{1+l}, \overrightarrow{OU} = \frac{\overrightarrow{OQ} + l\overrightarrow{OM}}{1+l}$ 1p
- $RSTU$ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{UR} = \overrightarrow{TS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OU}$ 1p
- $(1-l)(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ}) = \vec{0}$ și $l \neq 1$ rezultă $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$ 2p
- $(1-k)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$ și $k \neq 1$ rezultă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ 1p
- $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ rezultă $ABCD$ este paralelogram1p

Problema 4.

Considerăm patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Fie H, H' ortocentrele triunghiurilor ABD , respectiv ABC și G, G' centrele de greutate ale triunghiurilor HAD , respectiv $H'BC$.

- a) Să se exprime vectorul $\overrightarrow{GG'}$ în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{DC} .
- b) Dacă $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$, să se arate că patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel.

Soluție și barem:

a) Dacă O este centrul cercului circumscris patrulaterului, avem următoarele relații:

- $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 1p
 - $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}), \overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC})$ 1p
 - $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{OG'} - \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ 2p
- b) • $3\overrightarrow{GG'} = |\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}| \leq AB + 2CD$ 1p
- Avem egalitate dacă și numai dacă vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{DC} sunt coliniari, adică $ABCD$ este trapez1p
 - $ABCD$ inscriptibil, rezultă $ABCD$ trapez isoscel1p